

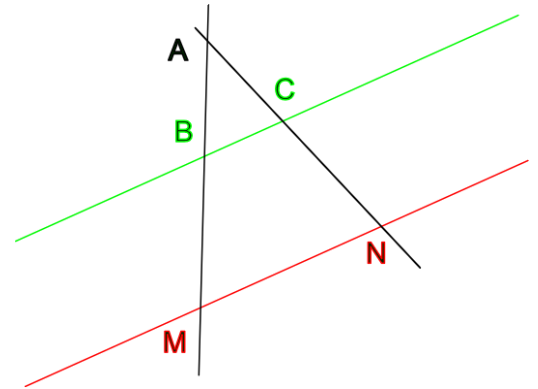
Thalès et le nombre d'or

Thalès et équations du second degré

Le théorème de Thalès est un théorème, c'est-à-dire quelque chose qu'on remarque sans pouvoir forcément expliquer pourquoi. Cela explique pourquoi les mathématiques, à leurs débuts, étaient équivalents à des religions : beaucoup de choses qu'on remarque mais sans pouvoir y apporter d'explication, ça ressemble à de la magie...

Et la magie est toujours plus impressionnante quand elle est simple. Et Thalès dit quelque chose de simple :

- tracer deux droites parallèles
- tracer deux droites non parallèles qui se croisent en un point A et qui croisent les deux droites parallèles aux points B et C pour la première, M et N pour la seconde
- abracadabra : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$



Pourquoi ? Parce que. C'est comme ça, et c'est tout.

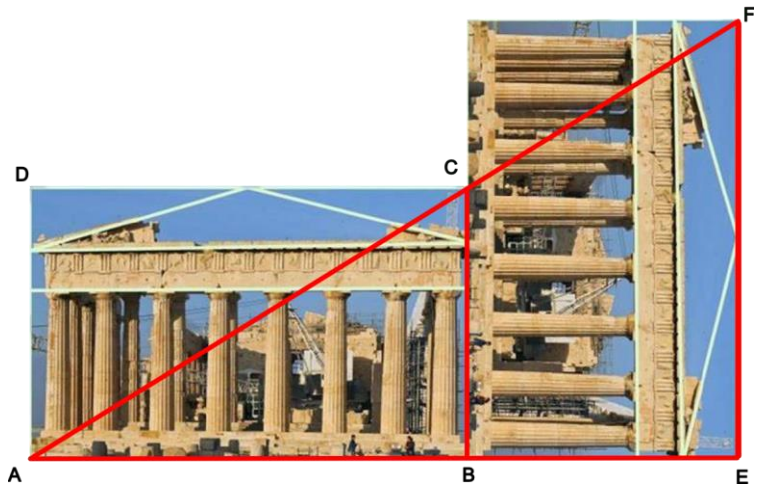
Forts de ce constat, certains ont eu l'idée d'appliquer cette règle à l'architecture.

Prenons le Parthénon, un temple dédié à un dieu grec. Et amusons-nous à copier / coller une image du Parthénon à côté, renversé.

On remarque quelque chose : les architectes se sont inspirés de Thalès pour déterminer les proportions de la façade : la largeur est un multiple de la hauteur.

Quel multiple ? Il est utilisé si souvent qu'on lui a donné un nom : le **nombre d'or** φ (c'est une lettre grecque qui s'appelle *phi*).

Le but de cette activité est de trouver le nombre d'or.



Utilisation de Thalès

Tout d'abord, prenons des dimensions simples. Comme le nombre d'or est un multiple, faisons en sorte qu'il soit ici le multiple de 1 : on va dire que la base du Parthénon a une largeur φ et une hauteur totale de 1.

En regardant le triangle de Thalès, on peut tout de suite trouver des valeurs (compléter) :

$$AB = \varphi$$

$$AE = \varphi + 1$$

$$BC = 1$$

$$EF = \varphi$$

L'une de ces valeurs est inconnue, et ça tombe bien : on la cherche.

Ecrivons-donc Thalès pour ce triangle (compléter) :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$

Maintenant, remplaçons ces segments par les valeurs qu'on a trouvé :

$$\frac{\varphi}{\varphi + 1} = \frac{1}{\varphi}$$

On obtient une équation avec des φ et des 1. Hé bien figurez-vous qu'on peut la réorganiser dans une forme bien familière : une équation du second degré.

Tout d'abord, passer ce φ à gauche du signe égal ; réduire.

$$\frac{\varphi}{\varphi + 1} = \frac{1}{\varphi}$$

Ensuite, passer $\varphi + 1$ à droite du signe égal ; réduire.

Passer tous les termes au côté gauche du signe égal, et la voilà, votre équation du second degré !

$$\frac{\varphi^2}{\varphi + 1} = 1$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

L'inconnue ici est φ et non x , mais ça ne va pas être un problème, n'est-ce pas ?

Maintenant, nous allons appliquer deux stratégies pour trouver φ : la méthode graphique, et la méthode analytique (formule quadratique) :

Méthode graphique

A l'aide d'une feuille de calculs ou de Geogebra, tracer la courbe $f(x) = x^2 - x - 1$.

Zoomer sur la racine positive (ou utiliser l'outil *Intersection* de Geogebra) et la noter.

Pour rappel : la racine d'une fonction est la valeur sur l'axe x à laquelle la fonction est égale à zéro.

Qu'est-ce que vous avez trouvé ?

En utilisant Geogebra ([lien vers l'activité](#)) :

Le nombre d'or, à environ 1.618.

Méthode analytique

Pour mémoire : pour $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- identifier a , b et c dans l'équation $x^2 - x - 1 = 0$
- appliquer la formule quadratique à l'aide de votre calculatrice favorite ; on gardera la solution positive.

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Pour aller plus loin

Le nombre d'or est bien plus qu'une curiosité, ou au moins ses propriétés laissent penser – et on comprend pourquoi les anciens lui prêtaient des propriétés divines. On comprend encore plus lorsqu'on fait l'expérience suivante.

Prenons les deux solutions de l'équation du second degré :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Et maintenant, plaçons ces valeurs dans une fonction découverte par plusieurs mathématiciens de renom au cours des siècles :

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$$

Attention : ce n'est pas vraiment une fonction mais plutôt une suite numérique : n est un entier.

OK. Dressons maintenant un tableau de valeurs :

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \varphi'^0) = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = 1$$

$$f(3) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3\right) = 2$$

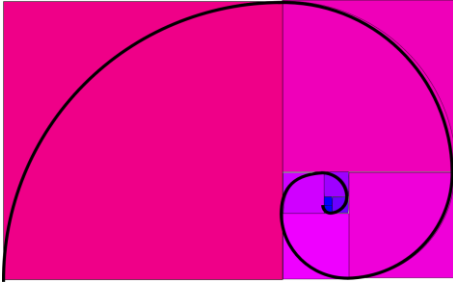
$$f(4) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^4\right) = 3$$

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^5\right) = 5$$

$$f(6) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^6\right) = 8$$

Il paraît que le cerveau humain est assez bon à reconnaître des motifs, et il y en a un qui apparaît ici : le nombre suivant de cette suite numérique est égal à la somme des deux nombres précédents. Par exemple : combien vous pariez que le nombre suivant sera $5 + 8 = 13$?

$$f(7) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^7 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^7\right) = 13$$

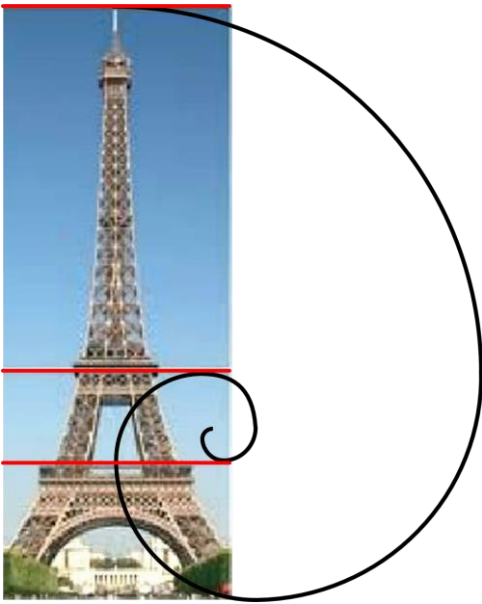


Cette suite a un nom : la suite de Fibonacci.

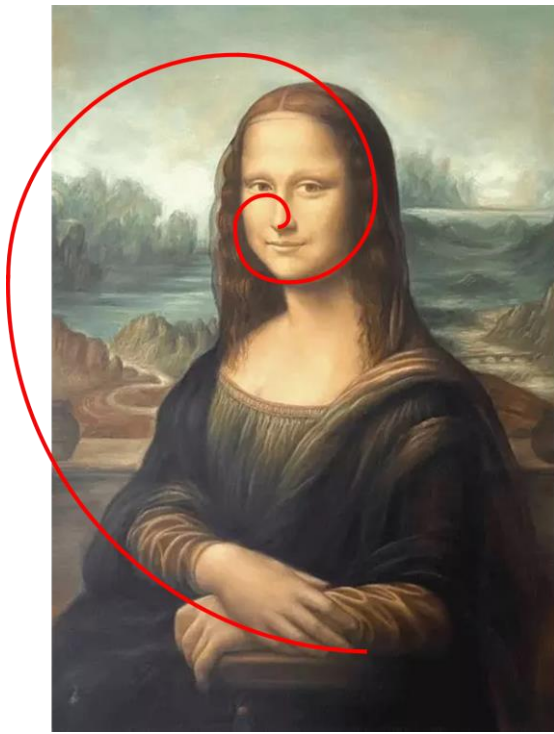
Avec cette suite, on peut construire une forme : en alternant des carrés dont les côtés sont donnés par la suite de Fibonacci, et en dessinant des quarts de cercles dans chaque carré, on obtient la spirale de Fibonacci.

C'est une jolie spirale, et on comprend qu'elle fascine. Elle commence même à faire un peu peur quand on réalise une chose : divisez un des nombres de la suite par le nombre précédent. Plus le nombre que vous avez choisi est grand, plus le résultat est proche de... φ .

Alors on comprendra qu'un architecte comme Jean Eiffel ai utilisé cette spirale pour faire sa tour : la hauteur entre le deuxième étage et le haut est égale à la hauteur entre la base et le deuxième étage multipliée par φ .



Ou qu'un artiste, ingénieur, mathématicien comme Léonard de Vinci l'utilise pour dessiner sa Joconde : observer comment le visage et la position du bras épouse la spirale.



Et plus tard, nous verrons la relation entre φ et un autre nombre tout aussi important et mystérieux : e .